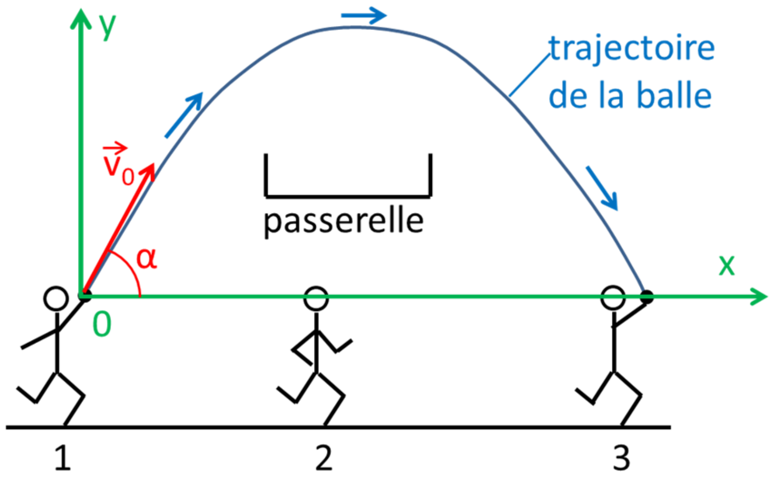
Exercice 2 : donnée : $g=9,81\ m/s^2$

Antoine court sur un chemin , il s'approche d'une passerelle ; il souhaite lancer sa balle par-dessus la passerelle, puis passer dessous et enfin récupérer la balle après la passerelle. Antoine est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vecteur vitesse $\vec{v_1}$. Le schéma ci-dessous résume la situation.



On étudie le mouvement d'Antoine A et de la balle M dans le repère (O,x,y), A et M seront supposés ponctuels.
On observe ces mouvements dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
On néglige les frottements de l'air.
L'angle α vaut 60°.
A t=0s, la vitesse v_0 vaut 10,0 m/s et les points M et A sont confondus avec l'origine O du repère.

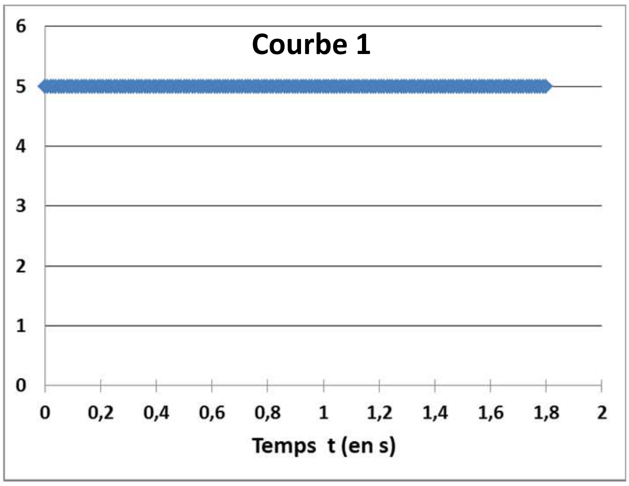
1. Établir l'expression du vecteur accélération du point M.
2. Montrer que les équations horaires du point M sont :

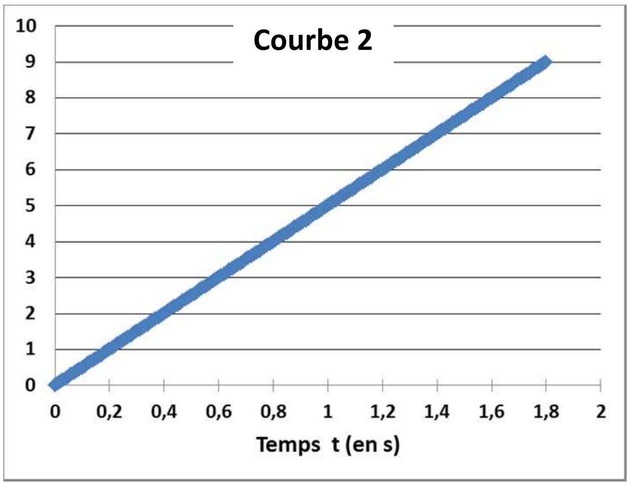
$$x(t) = (v_0.\cos\alpha).t \qquad \text{et} \qquad y(t) = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t$$

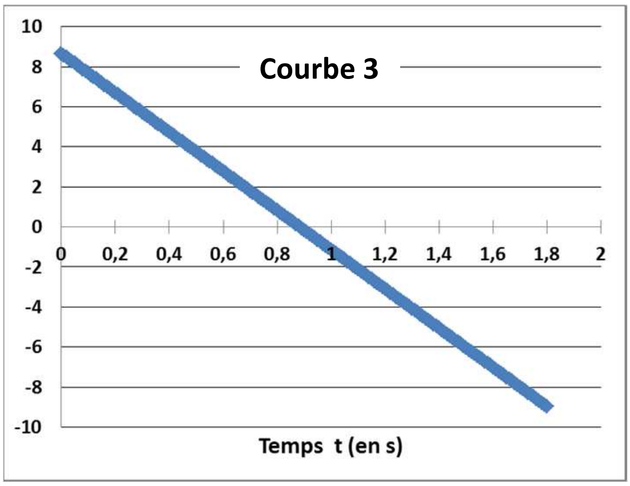
3. Montrer que l'équation de la trajectoire du point M s'écrit:

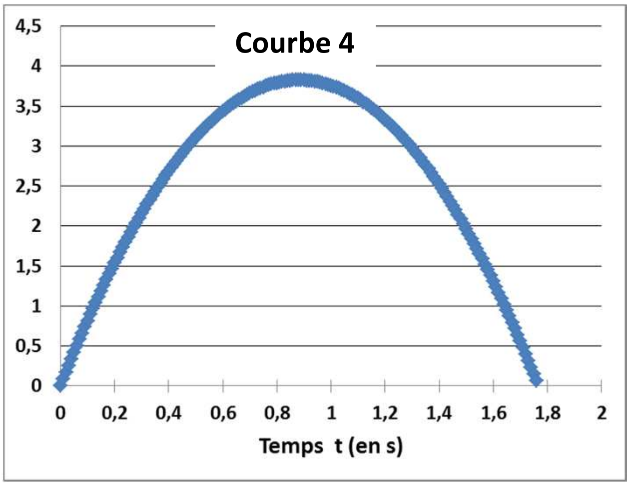
$$y = -\frac{g}{2.v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha . x$$

4. Les courbes ci-dessous montrent les représentations graphiques de l'évolution dans le temps des grandeurs x, y, v_x et v_y, coordonnées des vecteurs position et vitesse du point M.
Préciser pour chaque courbe l'expression de la grandeur qui lui correspond et justifier.









5. Déterminer par le calcul le temps dont dispose Antoine pour récupérer la balle avant que celle-ci ne touche le sol. Vérifier la valeur obtenue en utilisant un des graphes (préciser lequel).

6. Déterminer de deux manières différentes (par calcul) la valeur de la vitesse v_1 d'Antoine pour que son lancé soit réussi.

---

1. Système : {balle}

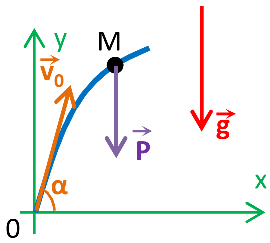
BF : poids $\vec{P}$

$m.\vec{a} = \Sigma \vec{f}_{ext}$

$m.\vec{a} = \vec{P}$

$m.\vec{a} = m.\vec{g}$

$\vec{a} = \vec{g}$



2. $\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$

Conditions initiales:

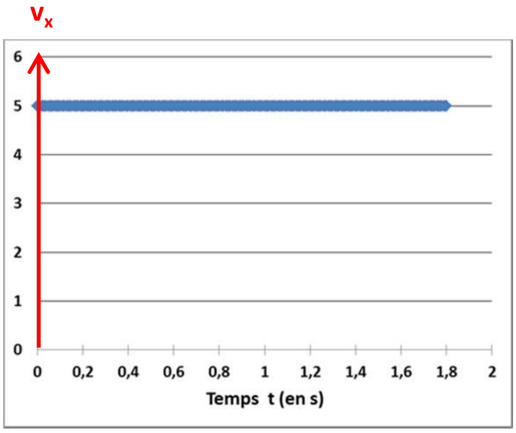
$\overrightarrow{OM}_0 \left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{array} \right.$ $\qquad \vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0x} = +v_0.\cos\alpha \\ v_{0y} = +v_0.\sin\alpha \end{array} \right.$

On sait que: $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ $\qquad \vec{v} = \dot{\overrightarrow{OM}}$ $\qquad$ donc :

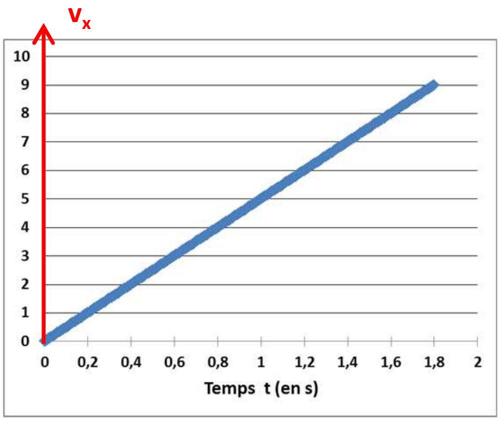
$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_0.\cos\alpha \\ v_y = -g.t + v_0.\sin\alpha \end{array} \right.$ $\qquad \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = (v_0.\cos\alpha).t \\ y = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t \end{array} \right.$

3. $x = (v_0.\cos\alpha).t$ $\qquad$ donc $\qquad t = \dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$

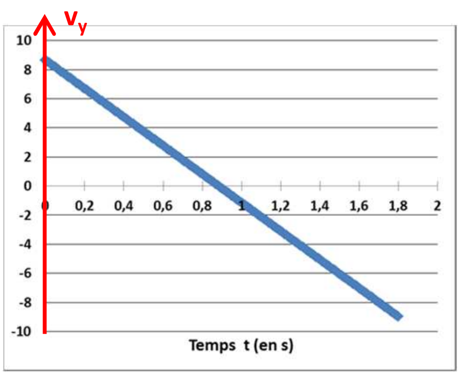
$$y = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + (v_0.\sin\alpha).\frac{x}{v_0.\cos\alpha} = -\frac{g}{2.v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x$$



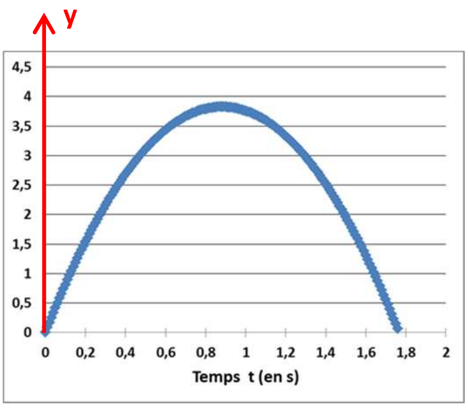
$v_x = v_0.\cos\alpha$ = cste donc la représentation de la fonction $v_x(t)$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



$x = (v_0.\cos\alpha).t$, il s'agit d'une fonction linéaire.



$v_y = - g.t + v_0.\sin\alpha$: il s'agit d'une fonction affine décroissante.



$y = -\frac{1}{2}\ .\ g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t$: il s'agit d'une fonction du type $y = a.x^2 + b.x + c$ (c=0) donc la représentation graphique est une parabole.

5. Il faut déterminer la date t_1 à laquelle la balle retombe sur le sol donc il faut résoudre l'équation y(t)=0

$$y(t)=0$$

$$-\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t = 0$$

$$(-\frac{1}{2}.g.t + v_0.\sin\alpha).t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}.g.t + v_0.\sin\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad t=0$$

$$-\frac{1}{2}.g.t_1 + v_0.\sin\alpha = 0$$

$$t_1 = \frac{2.v_0.\sin\alpha}{g} = \frac{2x10{,}0x\sin60°}{9{,}81} = 1{,}8 \text{ s}$$

On retrouve bien ce résultat sur la courbe 4 : à t_1=1,8s y=0

6. <u>1ère méthode</u>: Le lancé est réussi si Antoine se trouve à l'endroit de la balle quand elle retombe (abscisse x_1).
Valeur de x_1: $x_1 = v_0.\cos\alpha.t_1 = 10{,}0x\cos60°x1{,}8 = 8{,}8$ m

Vitesse d'Antoine : $v_{Antoine} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{8{,}8}{1{,}8} = 5{,}0$ m/s

<u>2ème méthode</u>: La vitesse **<u>horizontale</u>** v_x de la balle est constante; pour réussir son lancé, Antoine doit courir à la vitesse v_x: $v_{Antoine} = v_x = v_0.\cos\alpha = 10{,}0x\cos(60°)= 5{,}0$ m/s