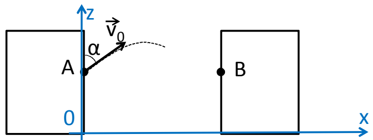
Leçon 16: Correction des exercices : Mouvement dans un champ uniforme.

Exercice 1 : donnée: $g = 9{,}81 m/s^2$

Deux enfants Anaïs et Bastien habitent au 3ème étage de 2 immeubles placés à 30,0 m l'un de l'autre. Anaïs souhaite lancer une balle à Bastien. Le schéma ci-dessous décrit la situation.



L'angle α vaut 65,0°, la vitesse initiale v_0 vaut 19,6 m/s, les 2 enfants sont situés à une hauteur h égale à 23,0 m au-dessus du sol. Le repère (O,x,z) permet d'étudier le mouvement de la balle M - considérée comme ponctuelle - dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on néglige les forces de frottement de l'air.

1. Déterminer l'expression du vecteur accélération de la balle.
2. Établir les équations horaires du mouvement.
3. Établir l'équation de la trajectoire z=f(x) de la balle en fonction de g, v_0, α et h.
4. Bastien va-t-il recevoir la balle ?

1. Système : caillou

Référentiel terrestre (galiléen)

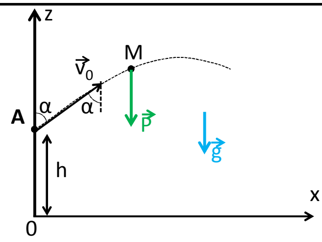
BF: poids $\vec{P}$

$m.\vec{a} = \Sigma\vec{F}_{ext}$

$m.\vec{a} = \vec{P}$

$m.\vec{a} = m.\vec{g}$

$\vec{a} = \vec{g}$



2. projection dans le repère O,x,y: $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_z = -g \end{array}\right.$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ $\quad \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = v_{x0} = v_0.\sin\alpha \\ v_z = -g.t + v_{z0} = -g.t + v_0.\cos\alpha \end{array}\right.$

$\vec{v} = \dot{\vec{OM}}$ $\quad \vec{OM}\left|\begin{array}{l} x = v_0.\sin\alpha.t + \underbrace{x_0}_{=0} \\ z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\cos\alpha.t + \underbrace{z_0}_{=h} \end{array}\right.$

3. $x = v_0.\sin\alpha.t$ donc $t = \frac{x}{v_0.\sin\alpha}$ or $y = -\frac{1}{2}.g.t^2 + v_0.\cos\alpha.t + h$

donc $y = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0.\sin\alpha}\right)^2 + v_0.\cos\alpha.\frac{x}{v_0.\sin\alpha} + h$ d'où : $z = -\frac{g}{2.v_0^2.\sin^2\alpha}.x^2 + \frac{x}{\tan\alpha} + h$

4. Bastien va recevoir la balle si la trajectoire de la balle passe par le point B c'est-à-dire au point de coordonnées B(30,0 ; 23,0).

Il faut donc calculer z_1 pour la valeur x_1=30,0m et conclure.

$$z = -\frac{g}{2.v_0^2.\sin^2\alpha}.x^2 + \frac{x}{\tan\alpha} + h$$

$$z = -\frac{9{,}81}{2\times 19{,}6^2\times\sin^2 65{,}0°}.x^2 + \frac{x}{\tan 65{,}0°} + 23{,}0$$

$$z = -0{,}0155.x^2 + 0{,}466.x + 23{,}0$$

$$z_1 = -0{,}0155.x_1^2 + 0{,}466.x_1 + 23 = -0{,}0155\times 30{,}0^2 + 0{,}466\times 30{,}0 + 23{,}0 = 23{,}0 \text{ m}$$

conclusion: La trajectoire de la balle passe par le point B donc Bastien reçoit la balle.

Exercice 2:

1. Système : {électron}

Référentiel terrestre (galiléen)

BF: $\vec{F}_e$ (P est négligeable devant F_e).

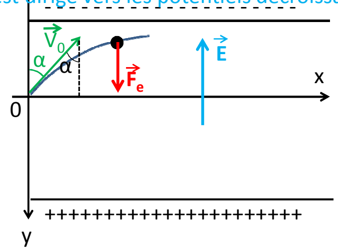
$m.\vec{a} = \Sigma\vec{F}_{ext}$

$m.\vec{a} = \vec{F}_e$

$m.\vec{a} = q.\vec{E}$

$\vec{a} = \frac{-e}{m}.\vec{E}$

($\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants



2. Projection dans le repère O,x,y: $\vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = \frac{-e.(-E)}{m} = \frac{e.E}{m} \end{array}\right.$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ $\quad \vec{v}\left|\begin{array}{l} v_x = v_{x0} = v_0.\sin\alpha \\ v_y = \frac{e.E}{m}.t + \underbrace{v_{y0}}_{= -v_0.\cos\alpha} \end{array}\right.$

$\vec{v} = \dot{\vec{OM}}$ $\quad \vec{OM}\left|\begin{array}{l} x = (v_0.\sin\alpha).t + \underbrace{x_0}_{=0} \\ y = \frac{e.E}{2.m}.t^2 - (v_0.\cos\alpha).t + \underbrace{y_0}_{=0} \end{array}\right.$

3.

$$y = \frac{e.E}{2.m}.t^2 - (v_0.\cos\alpha).\,t \;=\; \frac{e.U_{AB}}{2.m.d}.t^2 - v_0.\cos\alpha.\,t \qquad E = \frac{U_{AB}}{d}$$

$$v_y = \frac{e.E}{m}.t - v_0.\cos\alpha \;=\; \frac{e.U_{AB}}{m.d}.t - v_0.\cos\alpha$$

4. On sait que : $x = v_0.\sin\alpha.t$ donc $t = \frac{x}{v_0.\sin\alpha}$

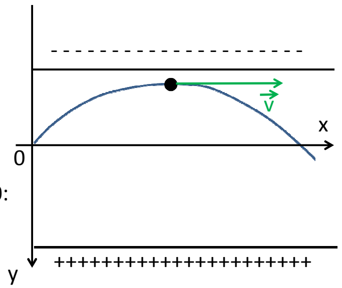
donc $y = \frac{e.U_{AB}}{2.m.d}.\left(\frac{x}{v_0.\sin\alpha}\right)^2 - v_0.\cos\alpha.\frac{x}{v_0.\sin\alpha}$

$$y = \frac{e.U_{AB}}{2.m.d.v_0^2.\sin^2\alpha}.x^2 - \frac{x}{\tan\alpha}$$

5. Quand le proton atteint le sommet de la parabole $v_y=0$:

$$v_y = \frac{e.U_{AB}}{m.d}.t - v_0.\cos\alpha$$

$$0 = \frac{e.U_{AB}}{m.d}.t_1 - v_0.\cos\alpha \qquad t_1 = \frac{m.d.v_0.\cos\alpha}{e.U_{AB}}$$



Exercice 3:

1.

2. Système : {électron} électron chargé <0

Référentiel terrestre (galiléen)

BF: $\vec{F}_e$ (P est négligeable devant F_e).

$m.\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$

$m.\vec{a} = \vec{F}_e$

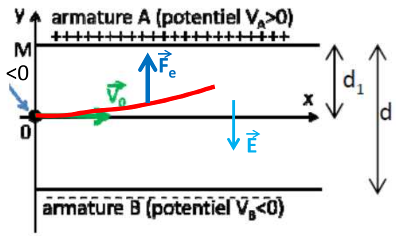
$m.\vec{a} = q.\vec{E}$

$\vec{a} = \frac{-e}{m}.\vec{E}$

3. Projection dans le repère O,x,y: $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{-e.(-E)}{m} = \frac{e.E}{m} \end{cases}$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ $\quad \vec{v}\begin{cases} v_x = v_{x0} = v_0 \\ v_y = \frac{e.E}{m}.t + v_{y0}^{\,=0} \end{cases}$

$\vec{v} = \dot{\vec{OM}}$ $\quad \vec{OM}\begin{cases} x = v_0.t + x_0^{\,=0} \\ y = \frac{e.E}{2.m}.t^2 + y_0^{\,=0} \end{cases}$



4.

$$y = \frac{e.E}{2.m}.t^2 = \frac{e.U_{AB}}{2.m.d}.t^2 \qquad E = \frac{U_{AB}}{d}$$

$$v_y = \frac{e.E}{m}.t = \frac{e.U_{AB}}{m.d}.t$$

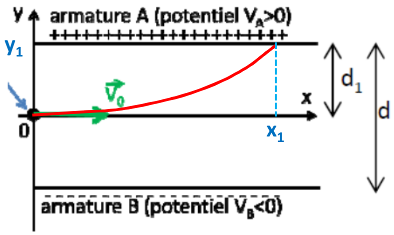
5. On sait que : $x = v_0.t$ donc $t = \frac{x}{v_0}$

donc $y = \frac{e.U_{AB}}{2.m.d}.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{e.U_{AB}}{2.m.d.v_0^2}.x^2$

6. $y_1 = d_1 = \frac{d}{2}$

$$y_1 = \frac{e.U_{AB}}{2.m.d.v_0^2}.x_1^2 \qquad x_1 = \sqrt{\frac{2.m.d.v_0^2}{e.U_{AB}}.y_1}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{m.d^2.v_0^2}{e.U_{AB}}}$$



Exercice 4:

1. Système : {balle}

BF : poids $\vec{P}$

$m.\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}$

$m.\vec{a} = \vec{P}$

$m.\vec{a} = m.\vec{g}$

$\vec{a} = \vec{g}$

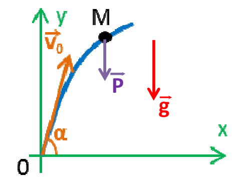
2. projection dans le repère O,x,y: $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\,g \end{cases}$

$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ $\quad \vec{v}\begin{cases} v_x = v_{x0} = v_0.\cos\alpha \\ v_y = -\,g.t + v_0.\sin\alpha \end{cases}$

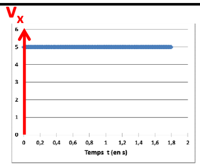
$\vec{v} = \dot{\vec{OM}}$ $\quad \vec{OM}\begin{cases} x = (v_0.\cos\alpha).t + x_0^{\,=0} \\ y = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t + y_0^{\,=0} \end{cases}$

3. $x = (v_0.\cos\alpha).t$ donc $t = \frac{x}{v_0.\cos\alpha}$

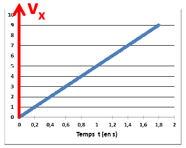
$$y = -\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0.\cos\alpha}\right)^2 + (v_0.\sin\alpha).\frac{x}{v_0.\cos\alpha} = -\frac{g}{2.v_0^2.\cos^2\alpha}.x^2 + \tan\alpha.x$$



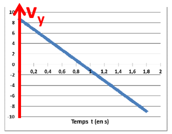
4.



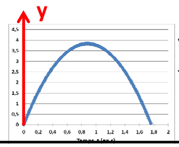
$v_x = v_0.\cos\alpha$ = cste donc la représentation de la fonction $v_x(t)$ est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



$x = (v_0.\cos\alpha).t$, il s'agit d'une fonction linéaire.



$v_y = -\,g.t + v_0.\sin\alpha$: il s'agit d'une fonction affine décroissante.



$y = -\frac{1}{2}\,.\,g.t^2 + (v_0.\sin\alpha).t$: il s'agit d'une fonction du type $y = a.x^2 + b.x + c$ (c=0) donc la représentation graphique est une parabole.

5. Il faut déterminer la date t_1 à laquelle la balle retombe sur le sol donc il faut résoudre l'équation y(t)=0

$$y(t)=0$$

$$-\frac{1}{2}\,.\,g.t^2 + v_0.\sin\alpha.t = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}\,.\,g.t + v_0.\sin\alpha\right).t = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\,.\,g.t + v_0.\sin\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad t=0$$

$$-\frac{1}{2}\,.\,g.t_1 + v_0.\sin\alpha = 0$$

$$t_1 = \frac{2.v_0.\sin\alpha}{g} = \frac{2\text{x}10{,}0\text{xsin}60°}{9{,}81} = 1{,}8\text{ s}$$

On retrouve bien ce résultat sur la courbe 4 : à t_1=1,8s y=0

6. <u>1ère méthode</u>: Le lancé est réussi si Antoine se trouve à l'endroit de la balle quand elle retombe (abscisse x_1).

Valeur de x_1: $x_1 = v_0.\cos\alpha.t_1$ = 10,0xcos60°x1,8 = 8,8 m

Vitesse d'Antoine : $v_{Antoine} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{8{,}8}{1{,}8}$ = 5,0 m/s

<u>2ème méthode</u>: La vitesse **<u>horizontale</u>** v_x de la balle est constante; pour réussir son lancé, Antoine doit courir à la vitesse v_x: $v_{Antoine} = v_x = v_0.\cos\alpha$ = 10,0xcos(60°)= 5,0 m/s